La Geometria dello spazio nella prova scritta degli esami di Stato

di Adriana Lanza[*]

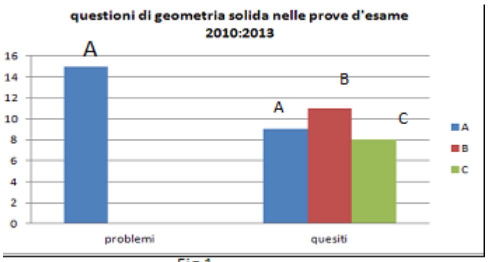

Fig.1

Gli argomenti di geometria solida presenti nelle tracce degli esami di maturità scientifica possono essere suddivisi in tre categorie:

A. Questioni relative al calcolo del volume dei solidi mediante gli integrali.
B. Questioni relative a obiettivi specifici di apprendimento della Geometria solida
C. Questioni in cui la Geometria solida fa da contesto (per esempio problemi di ottimizzazione o di Calcolo delle Probabilità).

Il grafico in Fig.1 sintetizza la frequenza delle singole tipologie nelle tracce dei tre principali indirizzi (Ordinamento, PNI-Brocca, Comunicazione) negli ultimi quattro anni, tenendo conto anche delle sessioni suppletive.

Poiché, come si evince dallo stesso grafico, nei problemi è presente solo la categoria A, limiteremo la nostra analisi ai soli quesiti.

La ricognizione delle tracce e un loro confronto, in base agli obiettivi specifici di apprendimento e ai corrispondenti processi cognitivi, può essere un riferimento per la stesura della prova scritta dell'esame di stato 2015, conclusivo del nuovo ciclo d'istruzione liceale, e nello stesso tempo contribuisce a dare chiarezza interpretativa alle Indicazioni Nazionali.

LE TRACCE

Tipologia A

2010 Q 10 [ORD -]
Si consideri la regione delimitata da $\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x=4 e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y .

***2010 Q10-*$[PNI]$**
Si consideri la regione R delimitata da $\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x=4 . L'integrale $\int_0^4 2\pi x\sqrt{x}\,dx$ fornisce il volume del solido:
A) generato da R nella rotazione intorno all'asse x
B) generato da R nella rotazione intorno all'asse y
C) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$
D) nessuno di questi
Si motivi esaurientemente la risposta.

***2010 Q8-supp.*$[PNI]$**
Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio r = 3; siano P(0, 3) e $Q(2, \sqrt{5})$ punti di C.
Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo PORQ (con R proiezione di Q sull'asse x).

2010 Q 5 suppl.[Com]
Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = x^2 - x^3$ e dall'asse delle x.

2011 Q3[ORD -]
Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta x = 2 e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

2011 Q3[PNI]
Sia R la regione delimitata, per $x \in [0; \pi]$, dalla curva y = sen x e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y.
Si calcoli il volume di W.

***2011 Q3 suppl.*$[ORD - PNI]$**
La retta di equazione x = 8 seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B.
Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola

2011 Q8 suppl.[PNI]
La regione del primo quadrante delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.

2012 Q4 suppl.[ORD -PNI]
La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione 1+ tg x e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

2013 Q4 suppl[ORD -PNI]
Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di f (x) = ln x e dall'asse x sull'intervallo [1, e].
In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da h(x) = x .
Quale sarà il volume del solido?

---
[*] *Mathesis Roma*

Tipologia B

2010 Q 2 [ORD - PNI-COM]
Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

2010 Q7 suppl.[ORD .].
Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza *l.* Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

2010 Q3-suppl[ORD.- PNI]-Q8$[\mathbf{COM}]$
Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto il cui raggio di base è *r* e l'altezza *2r,* e una sfera di raggio *r.*
A quale distanza *x* dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

2011 Q9[ORD e PNI-COM]
Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa**.**

2011 Q7 suppl.[ORD .].
Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

2012 Q7$[\boldsymbol{ORD-PNI-COM}]$
E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.

2012 Q7 suppl.[**ORD .**].
Un ottaedro regolare di alluminio (densità ρ = 2,7 g/cm3), avente lo spigolo l = 5 cm, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è m = 155 g, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità

2013 Q7 suppl.[**ORD .**]
Un cubo di legno di pioppo (densità ρ1 = 0,385 g/cm3) ed un tetraedro regolare di cristallo(ρ2 = 3,33 g/cm3) hanno entrambi lo spigolo *l*=5*cm.* Quale dei due ha la massa maggiore?

2013 Q4-[ORD-PNI]
D i un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza *h* e i lati *a* e *b* delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di *a, b* e *h*, illustrando il ragionamento seguito

2013 Q6 ***suppl.[PNI]***
Un cono di nichel (densità $\rho_1 = 8{,}91\ \frac{g}{cm^3}$) ha il raggio di base di 15 cm e l'altezza di 20 cm.
Da questo cono se ne taglia via un altro avente l'altezza di 5 cm che viene sostituito da un cilindro di alluminio (densità $\rho_2\ = 2{,}70\ \frac{g}{cm^3}$) avente la stessa altezza del cono piccolo e la base uguale alla base minore del tronco di cono residuo. Si dica se la massa m_2 del solido così ottenuto è maggiore o minore di quella m_1 del cono di partenza

2013 Q2 Suppl. $[\boldsymbol{ORD-PNI}\,.]$
Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche *solidi platonici?*

TIPOLOGIA C

2010 Q5.[ORD.- COM]
Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema . 80 cm.
Quale è la capacità in litri del serbatoio?

2011 Q6 [PNI-COM]
Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

2012 Q8[COM]

Fra le piramidi rette a base quadrata di assegnata superficie laterale S, si determini quella di volume massimo.

2010 Q9 Suppl.[PNI]
Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro.
Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

2012 Q4[ORD]
Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

2011 Q1 [ORD]
Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

2012 Q10[PNI]
Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista r $\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Osservazione:

Le questioni della categoria B sono sicuramente le più significative per una rilettura delle tracce alla luce delle Indicazioni Nazionali, sia per la specificità dei contenuti, sia per la flessibilità delle possibili strategie risolutive e delle abilità richieste.

LE SCELTE E LE PRESTAZIONI DEGLI STUDENTI

Grazie all'Indagine nazionale sulla prova scritta di Matematica all'Esame di Stato, condotta tramite il sito www.matmedia.it, è possibile conoscere le preferenze degli studenti e fare un'analisi quantitativa delle risposte corrette per ciascun quesito .

I risultati, anche se riferiti esclusivamente alle sessioni ordinarie, suggeriscono le seguenti conclusioni:

a) gli studenti, per lo più, non si orientano facilmente verso i quesiti di geometria solida, specialmente se richiedono abilità nella visualizzazione spaziale e nella rappresentazione delle figure;
b) le categorie A e C riscuotono generalmente maggiore consenso, rispetto alla categoria B, in quanto
   - *rimandano per lo più a formulazioni e a procedure standard*
   - *si riferiscono a proprietà delle figure spaziali facilmente riconducibili a una rappresentazione piana*;
c) le prestazioni degli studenti che hanno scelto i quesiti di tipologia B non sono significativamente diverse da quelle relative alle tipologie A e C.
   Le limitazioni nella scelta non sono dovute, evidentemente, a difficoltà intrinseche ai quesiti, bensì alla poca dimestichezza dei ragazzi con i concetti fondamentali della geometria solida, argomento che non sembra trovare molto spazio nei percorsi didattici.

LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO NELLE INDICAZIONI NAZIONALI

PROFILO GENERALE E COMPETENZE

Padroneggiare i principali concetti e metodi base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico.

Consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico.

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

O.S.A Geometria dello Spazio

Estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica.
Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.
Luoghi geometrici.
Proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).
Coordinate cartesiane nello spazio
Studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

RILETTURA DI ALCUNE TRACCE CHE SEMBRANO INTERPRETARE MEGLIO LE INDICAZIONI NAZIONALI

ESEMPIO 1.

Due quesiti che possono essere risolti sia per via sintetica sia per via analitica, in accordo con quanto si legge nelle Indicazioni Nazionali:<<...*lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.>>*

QUESITO	O.S.A	COMPETENZE	
Q2 2010 [ORD - PNI-COM] Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli	Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità. Studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.	Definizioni, dimostrazioni	Padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico→ **VETTORI**

SOLUZIONE

La retta r,essendo perpendicolare al piano del triangolo, è perpendicolare sia alla retta BA ,sia alla retta BC, pertanto i triangoli PBA e PBC sono rettangoli in B (Fig. 2).

Per dimostrare che anche PCA è rettangolo utilizziamo due metodi

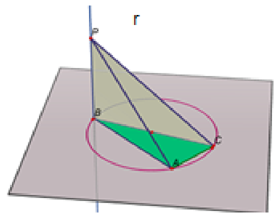

Fig.2

Dimostrazione sintetica:

Essendo AC perpendicolare ad AB, per il teorema delle 3 perpendicolari, la retta AC è perpendicolare al piano PBA, quindi il triangolo PCA è rettangolo in A

Dimostrazione analitica:

Siano a, b e c le misure dei lati BC, AC, AB ,rispettivamente , e sia k la distanza $\overline{BP}$.

In un riferimento cartesiano in cui il punto B è l'origine, il piano ABC è il piano xy, la retta BP l'asse z e la retta BA l'asse x, possiamo assegnare ai punti indicati le seguenti coordinate

A(c;0;0) B(0;0;0) C(c;b;0) P(0;0;k)

Pertanto le componenti dei vettori $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CP}$ sono, rispettivamente, $\begin{pmatrix}-c\\0\\k\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-c\\-b\\k\end{pmatrix}$

Si verifica facilmente che i vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AC}$ sono tra di loro perpendicolari, essendo nullo il loro prodotto scalare

QUESITO	O.S.A	COMPETENZE	
Q9 2011 [ORD e PNI-COM] Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.	Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità. Studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.	Definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni	Estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. Comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.

SOLUZIONE

Sia ABC un triangolo rettangolo in C e sia M il punto medio dell'ipotenusa AB (Fig.3). La retta r è perpendicolare in M al piano π su cui giace ABC.

Indichiamo con a, b e c le misure dei lati BC, CA e AB, rispettivamente.

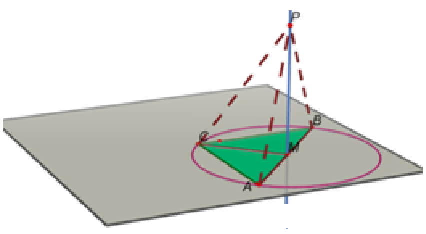

Fig.3

Metodo sintetico

Per dimostrare che r è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici dobbiamo mostrare che:

a) ogni punto P di r è equidistante da A,B e C

Essendo $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$, i triangoli rettangoli PMC,PMB e PMA , aventi in comune il cateto PM, sono tra loro congruenti; pertanto risulta $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

b) ogni punto P equidistante da A,B e C appartiene ad r

Se P è un punto tale che $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, i triangoli PMC,PMB e PMA sono tra loro congruenti. Essendo il triangolo PAB isocele, PM è perpendicolare ad AB e quindi i triangoli PMB e PMA sono rettangoli ; di conseguenza sarà rettangolo anche il triangolo PMC.

La retta PM, essendo perpendicolare a due rette del piano di ABC,è perpendicolare in M al piano stesso e quindi coincide necessariamente con r.

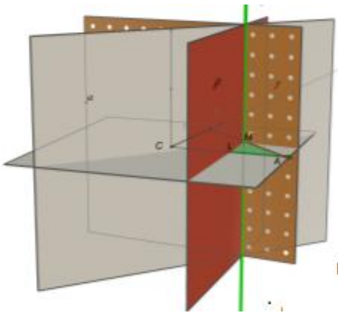

Fig.4

Metodo analitico

Introdotto un riferimento cartesiano Oxy avente l'origine nel vertice C, l'asse x coincidente con la retta CA, l'asse y coincidente con la retta CB, l'asse z coincidente con la retta perpendicolare a π nel punto C, sarà:

C(0,0,0) , A(b,0,0) , B(0,a,0) , M$(\frac{b}{2},\frac{a}{2},0)$

Indichiamo con P(x,y,z)un generico punto dello spazio e imponiamo che $\overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB}$

ovvero

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = & (x-b)^2+y^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = & x^2+(y-a)^2+z^2 \end{cases}$$

Dopo opportune semplificazioni si ottiene il sistema $\begin{cases} x = & \frac{b}{2} \\ y = & \frac{a}{2} \end{cases}$ che identifica proprio la retta r, quale intersezione del piano β, perpendicolare al lato CA nel suo punto medio L , e del piano γ, perpendicolare al lato CB nel suo punto medio N. Entrambi i piani passano per M e sono perpendicolari al piano xy (Fig.4).

ESEMPIO 2.

Due quesiti sui poliedri regolari, argomento ricco di spunti per un approfondimento didattico

QUESITO	O.S.A	COMPETENZE	
Q7 2010 $[\boldsymbol{Suppl. ord}]$ Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza *l*. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.	Proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione)	Definizioni, dimostrazioni	Estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. Comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria Padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico→ **TASSELLAZIONI**

Prima dimostrazione :

Si determinano i due volumi, che indicheremo con V_1 e V_2 rispettivamente, in funzione dello spigolo l

Volume tetraedro = $\boldsymbol{V_1 = \frac{1}{12} l^3 \sqrt{2}}$ **Volume** ottaedro = $\boldsymbol{V_2 = \frac{1}{3} l^3 \sqrt{2}}$ → $\boldsymbol{V_2 = 4\, V_1}$

Seconda dimostrazione :

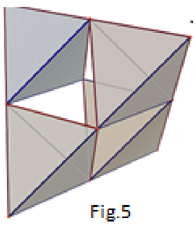

Fig.5

La Fig.5 mostra che:

costruendo 4 tetraedri regolari di lato l, su 4 delle facce dell'ottaedro, prese in modo alternato, si ottiene un tetraedro di lato 2l

quindi

l'ottaedro di spigolo l può essere inscritto in un tetraedro di spigolo 2l e di volume pari a 8 V_1.

Il tetraedro di spigolo 2l può essere decomposto in 5 parti, di cui una è l'ottaedro e le altre quattro consistono in tetraedri di spigolo l, quindi di volume pari a V_1

Pertanto: $\boldsymbol{8V_1 = V_2 + 4\, V_1}$ da cui $\boldsymbol{V_2 = 4\, V_1}$

Osservazioni

a) La prima dimostrazione , che sfrutta la dipendenza funzionale tra volume e lunghezza dello spigolo, può essere generalizzata per confrontare i volumi di coppie di poliedri regolari di uguale spigolo.
Si può osservare che il rapporto è razionale solo nel caso dell'ottaedro e del tetraedro.
Inoltre , a parità di spigolo, si trova una notevole differenza tra i volumi: il cubo, per esempio, ha un volume circa 8 volte maggiore del tetraedro, il dodecaedro è circa 65 volte più grande.
Può essere interessante osservare, invece, quali siano i rapporti tra poliedri regolari inscritti nella medesima sfera.

b) La seconda dimostrazione si basa invece su una costruzione che ricorda quella della tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri

QUESITO	OSA		COMPETENZE
2013 2 Suppl. ORD-PNI . Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche *solidi platonici?*	Proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione)	Definizioni, dimostrazioni	Consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico .

Commento

Il quesito è analogo a quello proposto nel 2006[ORD e PNI]

I poliedri regolari – noti anche come solidi platonici ***– sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?***

con una differenza tutt'altro che lieve nella formulazione.

Nel quesito del 2006, infatti, la citazione <<solidi platonici>> è del tutto marginale, mentre nel quesito del 2013 è parte integrante della richiesta.

Lo studente può scegliere diversi significati dell'attributo <<platonico>> in base alle sue conoscenze e al suo bagaglio culturale.

Può osservare che i poliedri regolari sono alla base del modello cosmologico elaborato da Platone, ma può ampliare il discorso osservando come la concezione della regolarità geometrica, quale metafora dell'ordine dell'universo, abbia influenzato il pensiero occidentale.

Si può citare semplicemente il noto brano del "Timeo"in cui il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro sono associati ai quattro elementi fondamentali, mentre Il dodecaedro rappresenta la quinta essenza che tutto avvolge e comprende.

Si può altresì fare un collegamento con il trattato "De quinque corporibus regularibus" di Piero della Francesca (la perfezione delle forme geometriche nella rappresentazione artistica della realtà) o con il "Mysterium cosmographicum" di Keplero: *"In questo piccolo libro, caro lettore, mi sono proposto di dimostrare che il Creatore Ottimo Massimo, nella creazione di questo nostro mondo mobile e nella disposizione dei cieli, ha guardato a quei cinque corpi regolari che hanno goduto di così gran fama dai tempi di Pitagora e Platone sino ai nostri giorni, e che alla loro natura ha uniformato il numero e la proporzione dei cieli, e i rapporti dei moti celesti ".*