2004.sess.straord. Quesito2) soluzione di Adriana Lanza

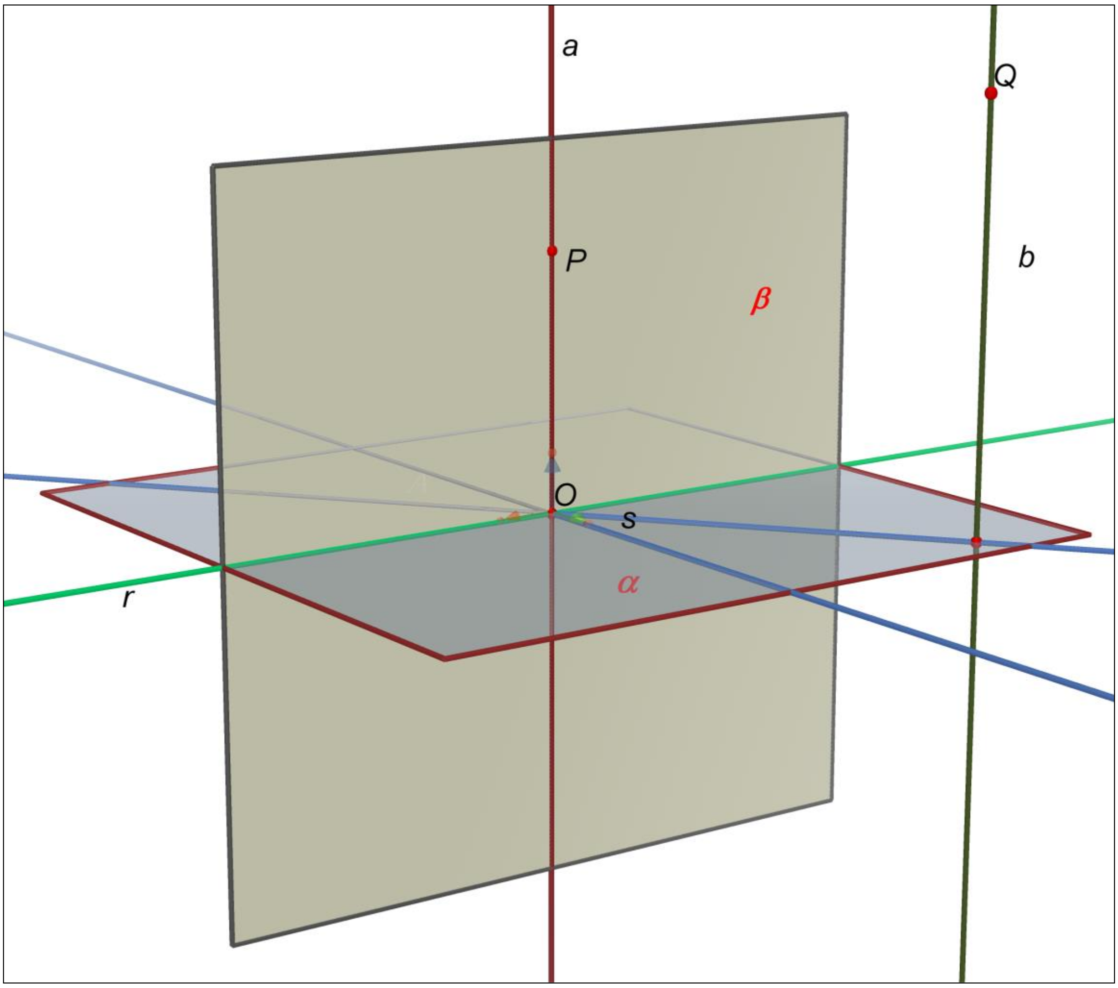
Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta

METODO GEOMETRICO

a)

Siano:

- α e β due piani tra loro perpendicolari
- r la retta comune ai due piani
- P un punto di β
- a una retta passante per P e perpendicolare ad α nel suo punto O



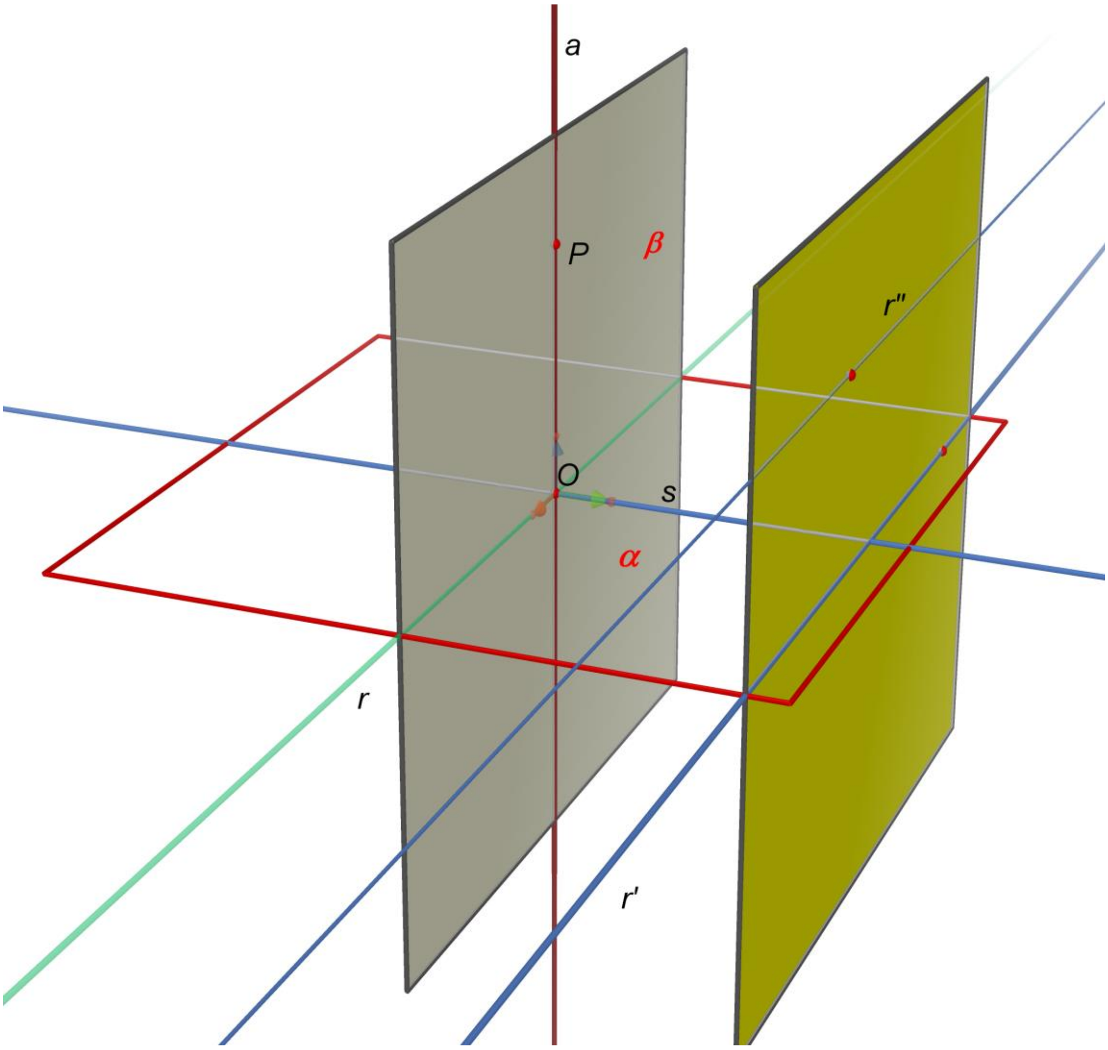
Dimostriamo che la retta a appartiene al piano β:

Nel piano β esiste una e una sola retta ***a'*** passante per P e perpendicolare alla retta ***r*** ; indichiamo con O'il piede della suddetta perpendicolare.

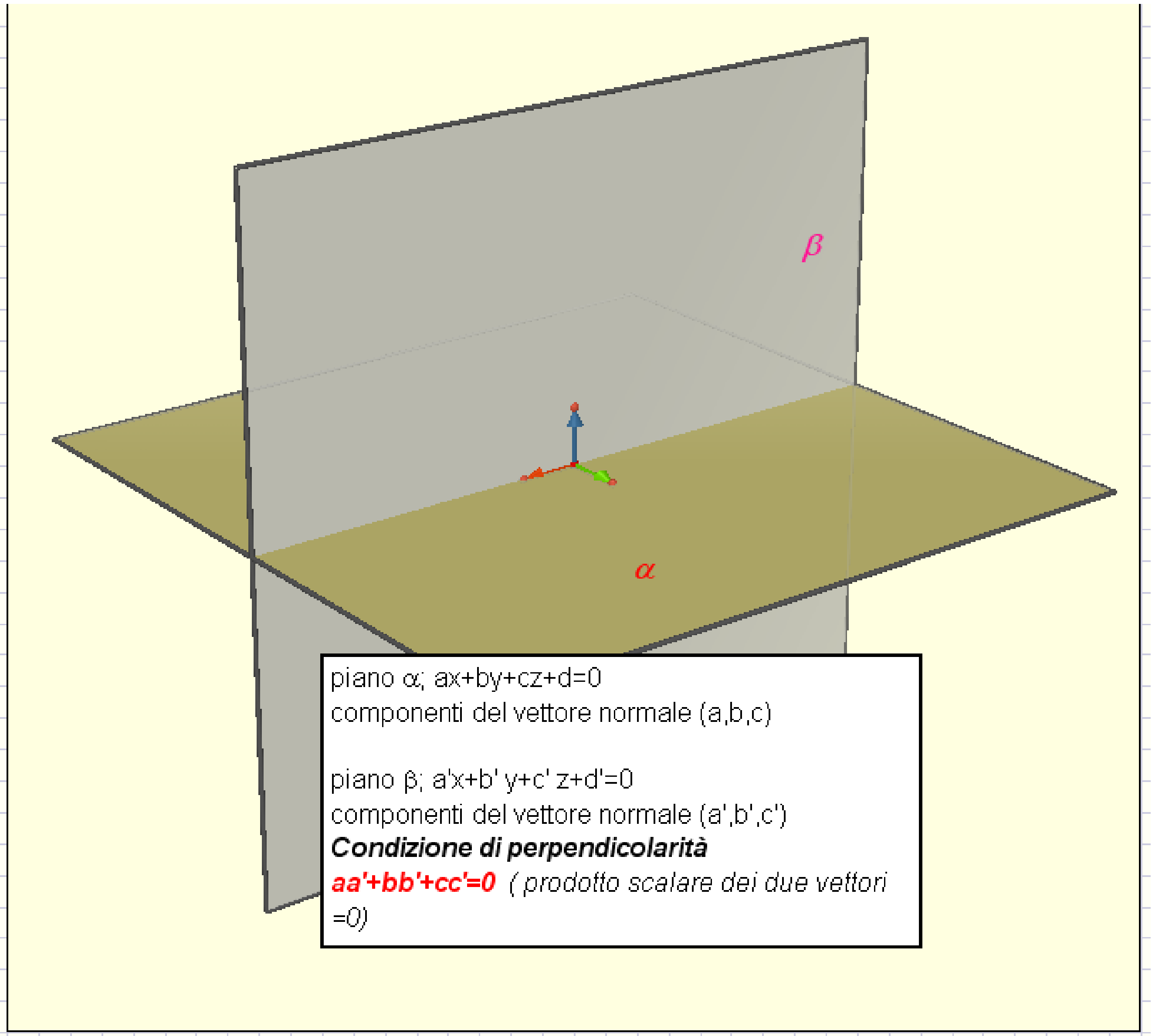
Sia ***s*** la retta del piano α perpendicolare ad ***r*** in O'.
Essendo i due piani tra loro perpendicolari, ***a'*** ed ***s*** individuano un angolo retto, quindi la retta ***a'***, essendo perpendicolare a due rette di α uscenti da O' (la retta ***r*** e la retta ***s***) è perpendicolare ad α.
Dal punto P pertanto si potrebbero condurre due rette perpendicolari al piano α e ciò è assurdo; si deduce che le due rette ***a*** e ***a'*** devono coincidere (come anche O e O').
Quindi resta dimostrato che la retta a appartiene al piano β

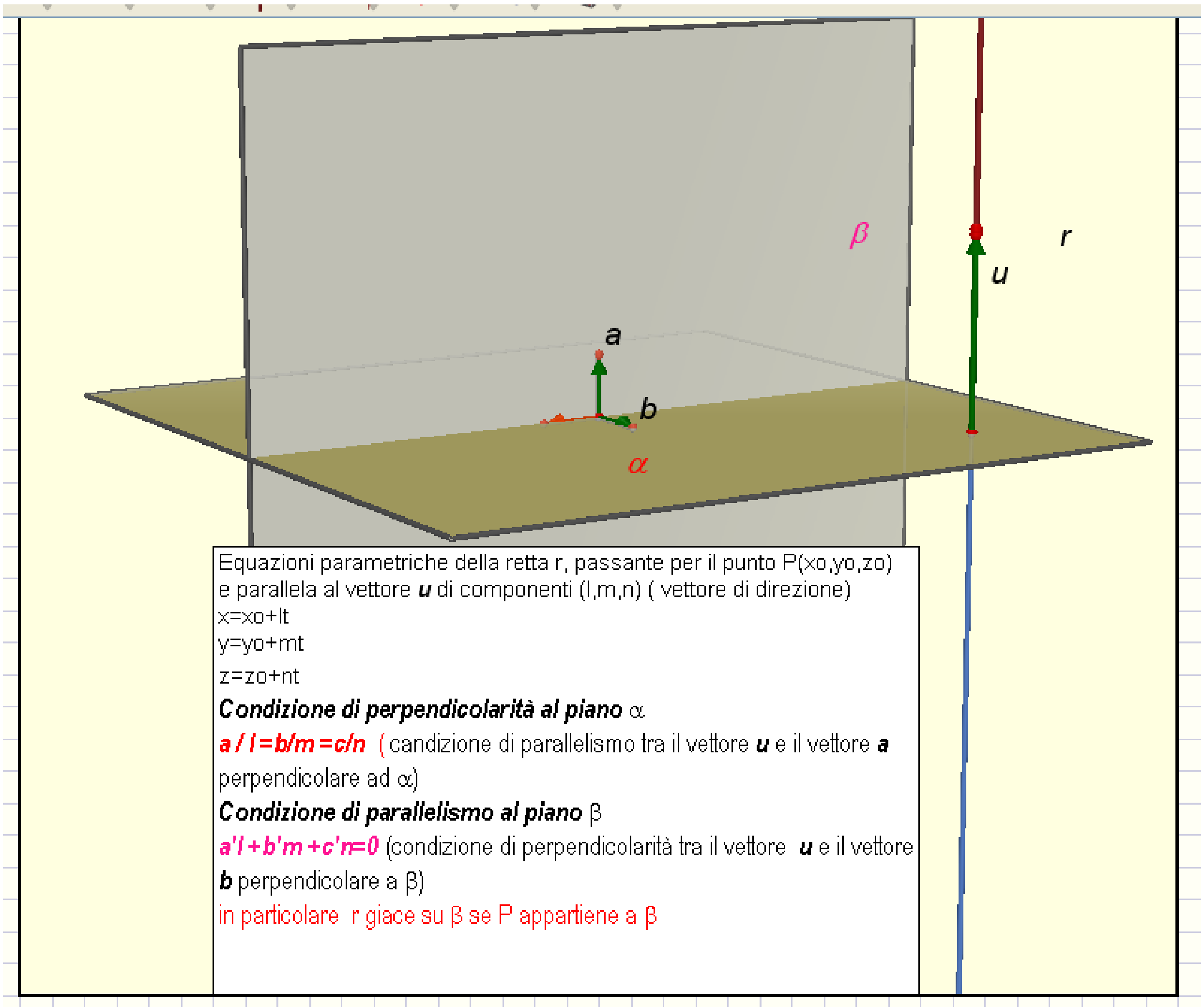
Se invece si traccia la retta b,perpendicolare ad α passante per un punto Q non appartenente a β, b sarà parallela ad a, perché entrambe sono perpendicolari ad α, e di conseguenza sarà parallela a β.

b)Non si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro.
Se ,ad esempio, consideriamo un piano parallelo a β, osserviamo che ogni retta che gli appartiene è parallela a β, ma non necessariamente perpendicolare ad α, come la retta r" rappresentata in figura (parallela ad entrambi i piani)



METODO ANALITICO





a)IPOTESI

1)α e β sono tra loro perpendicolari → $\vec{a} \perp \vec{b}$

*aa’+bb’+cc’=0

2) r è perpendicolare ad α→ $\vec{u}//\vec{a}$

** $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} = k$

Tesi

r parallela o appartenente a β → $\vec{u} \perp \vec{b}$

a’l+b’m+c’n=0

Dimostrazione:

- Dalla (**) si ricava
  $a=kl$
- $b=km$
- $c=kn$

Sostituendo nella (*)

$k(a'l+b'm+c'n)=0 \rightarrow a'l+b'm+c'n=0$ ovvero r è parallela a β o giace su β

b) Viceversa,

se

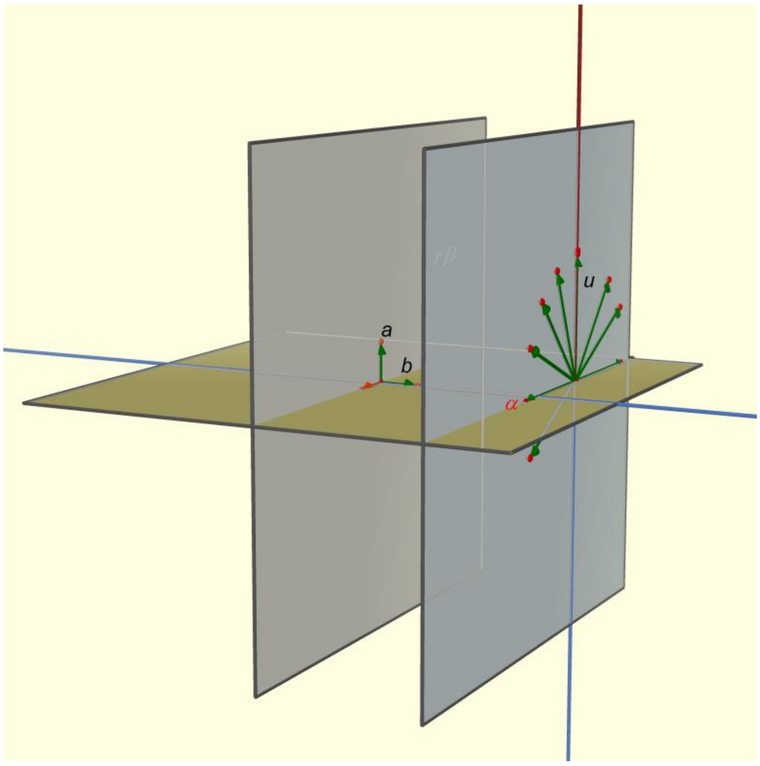
$\vec{a} \perp \vec{b}$

e

$\vec{u} \perp \vec{b}$

non si può concludere che
$\vec{u} // \vec{a}$

ma solo che $\vec{u}$ giace su un piano parallelo a β



Ovvero:

dalle due relazioni

aa’+bb’+cc’=0

a’l+b’m+c’n= 0

non si deduce necessariamente

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} = k$$

Esempio:

piano α→ z =0→ a=0 b=0 c=1 $\vec{a}$(0,0,1)

piano β→ y=0→ a’=0 b’=1 c’=0 $\vec{b}$(0,1,0)

$\vec{u}$ (l,m,n)→ $\vec{u}$ (1,0,0)