QUESITO 4

Dati i punti A(2, 0, -1) e B(-2, 2, 1), provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto T(-10, 8, 7) appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Soluzione

Preso un punto generico P (x, y, z) dello spazio cartesiano e i punti A (2, 0, -1) e B (-2, 2, 1), dobbiamo determinare il luogo geometrico descritto dal punto P tale sia soddisfatta la seguente relazione:

$$\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$$

Essendo

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2}$$

e

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

sostituiamo nella relazione data:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

da cui elevando al quadrato e sommando i monomi simili otteniamo l'equazione del luogo geometrico richiesto:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

che rappresenta l'equazione cartesiana di una superficie sferica S di centro C (-6, 4, 3) e raggio $r =$ $= \sqrt{\frac{12^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-6)^2}{4} - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Affinché il punto T (-10, 8, 7) appartenga alla superficie sferica S, le coordinate di T devono soddisfare l'equazione cartesiana di S.

Sostituendo tali coordinate nell'equazione di S otteniamo:

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Pertanto l'appartenenza di T a S è verificata.

Per determinare l'equazione del piano tangente in T alla superficie S, prendiamo in considerazione il vettore $\overrightarrow{TC}$ perpendicolare al piano stesso in T, che ha come componenti i parametri direttori del raggio (a, b, c); se $P_0(x, y, z)$ è un altro punto generico del piano tangente, allora il vettore $\overrightarrow{TP_0}$ deve essere perpendicolare al vettore $\overrightarrow{TC}$ e quindi essendo:

$$\overrightarrow{TC} = (a, b, c) = (-6 + 10, 4 - 8, 3 - 7) = (4, -4, -4)$$
$$\overrightarrow{TP_0} = (x + 10, y - 8, z - 7)$$

si deve avere per la perpendicolarità

$$\overrightarrow{TC} \times \overrightarrow{TP_0} = 0$$

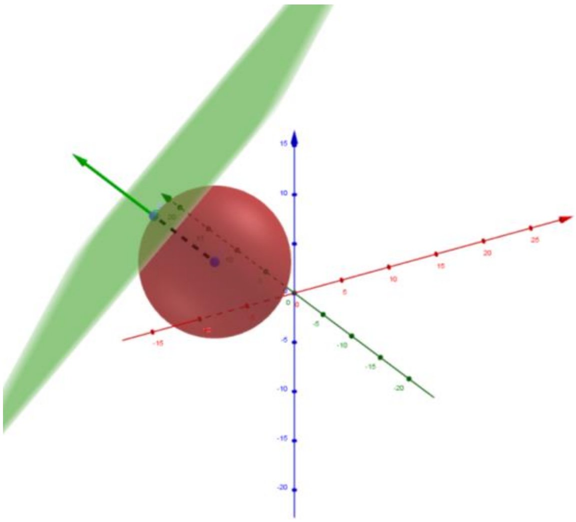
$$4(x + 10) - 4(y - 8) - 4(z - 7) = 0$$

o anche semplificando

$$(x + 10) - (y - 8) - (z - 7) = 0$$

$$x - y - z + 25 = 0$$

che rappresenta l'equazione del piano tangente richiesto.



COMMENTO

Il quesito affronta un argomento di tipo standard, che è stato più volte proposto all'esame di stato. Richiede la conoscenza della Geometria analitica in tre dimensioni e una certa familiarità col calcolo vettoriale, malgrado questo non compaia in modo esplicito nei quadri di riferimento.