

Anche tu ,spazio tempo!

E.F. Taylor- J.A. Wheeler- Fisica dello Spazio-Tempo- Zanichelli

Giulio Cesare venne assassinato il 15 marzo dell'anno 44 a.C. (circa 2000 anni fa) all'età di 55 anni. E' possibile salvargli la vita usando le leggi della Relatività?

Scegliamo la morte di Cesare come evento di riferimento, contrassegnato dal pedice o:

$$x_o = 0 \quad t_o = 0$$

L'evento A è dato da te che leggi questo esercizio.

Nel sistema della terra le coordinate dell'evento A sono

$$x_A = 0 \text{ anni luce} \quad t_A = 2000 \text{ anni}$$

L'astronave Enterprise, che sta navigando nella galassia di Andromeda, fa scoppiare un petardo: evento B.

Nel tuo sistema di riferimento gli eventi A e B sono simultanei.

L'astronave Enterprise si muove nello spazio lungo una linea retta che la connette con la Terra

Nel nostro sistema di riferimento la distanza di Andromeda è di 2 milioni di anni luce. Rispetto a questa distanza è possibile trascurare il moto orbitale della Terra intorno al Sole.

Pertanto , nel nostro sistema di riferimento, l'evento B ha coordinate

$$x_B = 2 \cdot 10^6 \text{ anni luce} \quad t_b = 2000 \text{ anni}$$

Si suppone che l'assassinio di Cesare sia l'evento di riferimento anche per l'Enterprise

$$x'_o = 0 \quad t'_o = 0$$

- a) Quale deve essere la velocità dell' Enterprise (nel riferimento della Terra) affinché l'assassinio di Cesare stia avvenendo <<ORA>> cioè affinché si abbia

$$t'_B = 0 ?$$

[0,001 c]

In queste condizioni Enterprise si sta allontanando dalla Terra o si sta avvicinando?

[allontanando]

- b) Disegna un diagramma spazio-tempo relativo alla Terra che mostri l'evento O , l'evento A , l'evento B, la tua linea di simultaneità , la posizione dell'Enterprise, la sua linea universo, la sua linea di simultaneità . Non è necessario disegnare il diagramma in scala.
- c) Quali sono le coordinate dell'esplosione del petardo nel sistema dell'Enterprise?

[1,999999 · 10⁶ anni luce ; 0]

L'esplosione del petardo può avvertire Giulio Cesare cambiando il corso della storia sulla Terra?

[No!]

Soluzione

a) Il tempo è misurato in anni e lo spazio è misurato anni luce

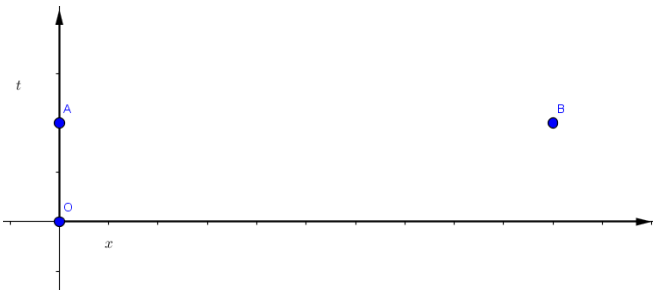
Se $\frac{v}{c}$ è il rapporto tra la velocità dell'astronave rispetto alla terra, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Riferimento solidale con la Terra

Evento O Morte di Giulio Cesare O(0;0)

Evento A (0; 2 · 10³)

Evento B (2 · 10⁶ c; 2 · 10³)



(Fig.1 disegno non in scala)

Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x_B' = \gamma(x_B - vt_B) \\ t_B' = \gamma(t_B - \frac{v}{c^2}x_B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B' = \gamma(2 \cdot 10^6 c - 2 \cdot 10^3 v) \\ t_B' = \gamma(2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^6 c \frac{v}{c^2}) \end{cases}$$

Dobbiamo imporre $t_B' = 0$, pertanto

$$2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^6 \frac{v}{c} = 0 \rightarrow \frac{v}{c} = 10^{-3}$$

La velocità dell' Enterprise (nel riferimento della Terra) affinché l'assassinio di Cesare stia avvenendo <<ORA>> deve essere $v = 10^{-3}c$.

Poiché v è positiva, nel riferimento scelto, l'astronave si sta allontanando dalla terra

b) Si consideri $c=1$

- La linea universo della terra è la retta di equazione $x=0$. Le rette di simultaneità sono parallele all'asse x ($t=$ costante).
- La linea universo dell'Enterprise è una retta passante per il punto B e avente coefficiente angolare $\frac{1}{v}$
- Le rette di simultaneità dell'Enterprise sono rette di coefficiente angolare v , come si ottiene ponendo $t'=$ costante nella seconda equazione delle trasformazioni di Lorentz.
- Le linee universo dei segnali luminosi hanno coefficiente angolare uguale a ± 1 e sono le bisettrici degli angoli formati dalla retta universo e dalla retta di simultaneità dell'Enterprise.

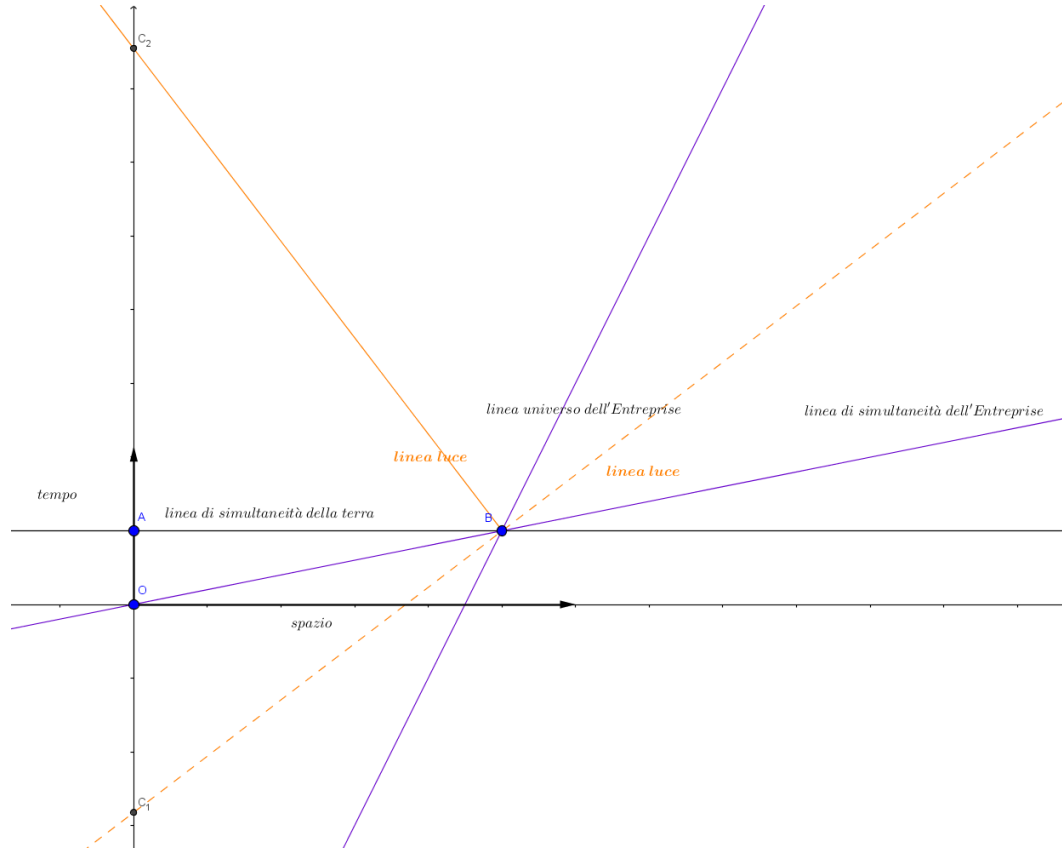
Nel riferimento della Terra A e B sono simultanei mentre non lo sono B e O.

Nel sistema dell'Enterprise sono simultanei B e O (Relatività della simultaneità)

Dal punto di vista della Terra tra O e A c'è un intervallo temporale $\Delta t = 2 \cdot 10^3$ anni (tempo proprio)

Per l'astronave invece l'intervallo di tempo è maggiore: $\Delta t' = \gamma \cdot 2 \cdot 10^3$ anni (dilatazione del tempo-tempo improprio)

Figura 2



c) Conosciamo già il valore $t'_B = 0$

Per calcolare il valore di x_B' applichiamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x_B' = \gamma(x_B - vt_B) \\ t_B' = \gamma(t_B - \frac{v}{c^2}x_B) \end{cases} \text{ dove } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1,0000005$$

$$x_B' = \gamma(2 \cdot 10^6 c - 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} c) = 2 \cdot 10^6 c \gamma (1 - 10^{-6}) \cong$$

$$2 \cdot 10^6 \cdot 1,000005 \cdot 0,999999 c = 1,999999 \cdot 10^6 \text{ anni luce}$$

N.B. Spesso nei calcoli si preferisce approssimare il valore di γ
Essendo $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cong 1 - \frac{x}{2}$ si considera $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{10^{-6}}{2}$

Ripetendo i calcoli, con questa approssimazione, si trova

$$x_B' = 2 \cdot 10^6 c \left(1 + \frac{10^{-6}}{2}\right) (1 - 10^{-6}) =$$

$$2 \cdot 10^6 c \left(1 - \frac{10^{-6}}{2} - \frac{10^{-12}}{2}\right) \cong$$

$$(2 \cdot 10^6 - 1)c = 1,999999 \cdot 10^6 c$$

Le coordinate di B , nel sistema dell'Enterprise sono $(1,999999 \cdot 10^6 c ; 0)$

d) Ricapitolando

	Terra	Enterprise
O	(0; 0)	(0;0)
B	$(2 \cdot 10^6 c; 2 \cdot 10^3)$	$(2 \cdot 10^6 c \gamma (1 - 10^{-6}) ; 0)$

Calcoliamo la distanza spazio-temporale tra i due eventi O e B

$$\Delta S^2 = (ct)^2 - x^2 = 4c^2 \cdot 10^6 - 4c^2 \cdot 10^{12} = 4c^2 10^6(1 - 10^6) = -4c^2 10^6(10^6 - 1)$$

$$\Delta S'^2 = (ct')^2 - x'^2 = -4c^2 \gamma^2 \cdot 10^{12} (1 - 10^{-6})^2 = -4c^2 10^{12} \frac{1}{1-10^{-6}} (1 - 10^{-6})^2 = -4c^2 10^{12} (1 - 10^{-6}) = -4c^2 10^6(10^6 - 1)$$

ΔS^2 è invariante ed è un numero negativo (intervallo di tipo "spazio")

La separazione spaziale supera la separazione temporale

$$c\Delta t < \Delta x$$

O si trova al di fuori del cono di luce di B

- Esiste un riferimento per il quale i due eventi stanno sulla stessa linea di simultaneità ma non esiste un riferimento per il quale i due eventi stanno sulla stessa linea universo
- I due eventi non possono avere una relazione di causa-effetto in quanto qualsiasi segnale, per collegarli in un tempo Δt , dovrebbe coprire una distanza $\Delta x > c\Delta t$, cioè maggiore di quella percorsa, nello stesso tempo, da un raggio di luce. Poiché la velocità della luce è velocità limite, ciò non può accadere.
- Ormai non si può più salvare la vita a Giulio Cesare!

Osservazione

Gli eventi O e A hanno invece, nel riferimento della terra e quindi in qualsiasi altro riferimento ,distanza spazio-temporale positiva

$$\Delta S^2 = (ct_A)^2$$

Si tratta di due eventi separati temporalmente

$$c\Delta t > \Delta x$$

e sono in relazione di causa-effetto .

Esiste un riferimento , la Terra, per cui $\Delta x = 0$ e per cui $\Delta t = 2 \cdot 10^3$ anni è minimo (tempo proprio)